

Nama : Mohammad Febryan Khamim

NRP : 5002221072

Deadline : Selasa, 10 September 2024

6. Diketahui : $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ bebas linier. Tentukan apakah himpunan pada soal a), b), c), dan d) juga bebas linier!

* Bebas linier, artinya

misal V ruang vektor terhadap suatu lapangan $\mathbb{F}$, maka $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ bebas linier ketika terdapat skalar $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \in \mathbb{F}$ memenuhi

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3 = \vec{0}$$

hanya ketika $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

Jawab :

a). $\{\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \vec{v}_2 + \vec{v}_3\}$

misal terdapat skalar β_1 dan β_2

$$\beta_1 (\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3) + \beta_2 (\vec{v}_2 + \vec{v}_3)$$

$$\beta_1 \vec{v}_1 + (\beta_1 + \beta_2) \vec{v}_2 + (\beta_1 + \beta_2) \vec{v}_3$$

karena $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ bebas linier, maka

$$\beta_1 = 0$$

$$\beta_1 + \beta_2 = 0 \rightarrow \beta_2 = 0$$

Akibatnya $\{\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \vec{v}_2 + \vec{v}_3\}$ bebas linier

b). $\{\vec{0}, \vec{v}_1, \vec{v}_2 + \vec{v}_3\}$

misal terdapat skalar c_1, c_2, c_3

$$c_1 \vec{0} + c_2 \vec{v}_1 + c_3 (\vec{v}_2 + \vec{v}_3)$$

$$= c_2 \vec{v}_1 + c_3 \vec{v}_2 + c_3 \vec{v}_3$$

karena $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ bebas linier, maka

$$c_2 = 0$$

$$c_3 = 0$$

Akan tetapi, terdapat vektor $\vec{0}$ membuat c_1 dapat sebarang bilangan real, sehingga $\{\vec{0}, \vec{v}_1, \vec{v}_2 + \vec{v}_3\}$ tidak saling bebas linier

c). $\{9\vec{v}_1, 5\vec{v}_2, 6\vec{v}_1 - 7\vec{v}_2\}$

misal terdapat skalar k_1, k_2, k_3 , maka

$$k_1 (9\vec{v}_1) + k_2 (5\vec{v}_2) + k_3 (6\vec{v}_1 - 7\vec{v}_2)$$

$$= (9k_1 + 6k_3) \vec{v}_1 + (5k_2 - 7k_3) \vec{v}_2 =$$

karena $\vec{v}_1$ dan $\vec{v}_2$ saling bebas linier, maka

$$9k_1 + 6k_3 = 0$$

$$9k_1 = -6k_3$$

$$k_1 = -\frac{2}{3}k_3$$

$$5k_2 - 7k_3 = 0$$

$$5k_2 = 7k_3$$

$$k_2 = \frac{7}{5}k_3$$

Sehingga, $\{9\vec{v}_1, 5\vec{v}_2, 6\vec{v}_1 - 7\vec{v}_2\}$ tidak saling bebas linier

d). $\{\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_1 + \vec{v}_3, \vec{v}_2 - \vec{v}_3\}$

misal terdapat skalar c_1, c_2, c_3

$$c_1 (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + c_2 (\vec{v}_1 + \vec{v}_3) + c_3 (\vec{v}_2 - \vec{v}_3)$$

$$(c_1 + c_2) \vec{v}_1 + (c_1 + c_3) \vec{v}_2 + (c_2 - c_3) \vec{v}_3$$

karena $\vec{v}_1, \vec{v}_2$, dan $\vec{v}_3$ saling bebas linier, maka :

$$c_1 + c_2 = 0$$

$$c_1 = -c_2$$

$$c_1 + c_3 = 0$$

$$c_3 = -c_1 = c_2$$

$$c_2 - c_3 = 0$$

$$c_3 = c_2$$

Sehingga, $\{\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_1 + \vec{v}_3, \vec{v}_2 - \vec{v}_3\}$ tidak saling bebas linier

7). Tunjukkan bahwa setiap sub himpunan dari himpunan vektor yang bebas linear juga bebas linier.

Ambil $V' \subseteq V$, maka

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = \vec{0} \text{ untuk tiap } v_n \in V$$

dan $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F}$. Karena V bebas linier, haruslah $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$. Ambil $c_i \in \mathbb{F}$ dan $V' \subseteq V$, maka

$$c_i v_i + \dots + c_m v_m = \vec{0}, \text{ dengan } m \leq n.$$

Pastilah V' bebas linier karena apabila terdapat satu saja c_i yang tak nol, maka V tidak bebas linier [Terbukti]

8. (a). Bisakah anda temukan 3 vektor pada $\mathbb{R}^3$ yang bebas linear, sebarang 2 diantaranya adalah bebas linier? Jika iya, berikan contoh, jika tidak, tunjukkan kenapa!

Jawab.

(a). Bisa.

Contohnya :

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b). Apa yang terjadi pada bagian (a) jika dicoba pada $\mathbb{R}^2$?

Maka sudah pasti tidak bebas linear. Karena kebebasan linier memiliki karakteristik bahwa, Suatu vektor pada $\mathbb{R}^n$ dapat bebas linier jika maksimal terdapat n vektor.

Pada kasus ini, apabila jumlah vektornya 3 sementara pada ruang vektor 2, pastilah himpunan vektor tersebut tidak saling bebas linier

9. Asumsikan $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ adalah vektor-vektor pada ruang vektor yang memenuhi kondisi $\vec{v}_1 \neq \vec{0}, \vec{v}_2 \notin \text{span}\{\vec{v}_1\}, \vec{v}_3 \notin \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}, \vec{v}_n \notin \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{n-1}\}$. Tunjukkan bahwa $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ bebas linier.

Buktikan dengan induksi

① Akan dibuktikan benar untuk $n=1$

$\vec{v}_1 \neq \vec{0}$, sudah pasti $\vec{v}_1$ bebas linier karena saat ambil k_1 , maka $k_1 \vec{v}_1 = \vec{0}$, hanya ketika $k_1 = 0$

② Anggap ^{benar} untuk $n=k-1$
 $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}$ benar (bebas linier),

maka

$$C_1 \vec{v}_1 + C_2 \vec{v}_2 + C_3 \vec{v}_3 + \dots + C_{k-1} \vec{v}_{k-1} = \vec{0}$$

hanya ketika $C_1 = C_2 = \dots = C_{k-1} = 0$

③ Buktikan benar untuk $n=k$

$$C_1 \vec{v}_1 + C_2 \vec{v}_2 + \dots + C_{k-1} \vec{v}_{k-1} + C_k \vec{v}_k$$

$$C_k \vec{v}_k = -(C_1 \vec{v}_1 + C_2 \vec{v}_2 + \dots + C_{k-1} \vec{v}_{k-1})$$

$$\vec{v}_k = -\frac{1}{C_k} (C_1 \vec{v}_1 + C_2 \vec{v}_2 + \dots + C_{k-1} \vec{v}_{k-1})$$

Agar bentuk tersebut memenuhi syarat soal di mana $\vec{v}_n$ bukan kombinasi linier dari $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{n-1}\}$, maka haruslah $C_k = 0$. Ketika $C_k = 0$, maka $C_1 = C_2 = \dots = C_{k-1} = 0$ yang membuat benar saat $n=k$.

Jadi, terbukti bahwa $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ bebas linier.

10). Anggap U dan V adalah sub ruang pada $\mathbb{R}^n$ dan sub himpunan $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_s\} \subset U$ dan $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_t\} \subset V$ bebas linier. Jika $U \cap V = \{\vec{0}\}$, Tunjukkan bahwa $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_s, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_t\}$ bebas linier

• Diketahui :

• $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_s\} \subset U$ bebas linier

• $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_t\} \subset V$ bebas linier

• $U \cap V = \{\vec{0}\}$

$\Rightarrow$ Akan ditunjukkan $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_s, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_t\}$ Bebas linier

$$C_1 \vec{u}_1 + C_2 \vec{u}_2 + C_3 \vec{u}_3 + \dots + C_s \vec{u}_s + k_1 \vec{v}_1 + k_2 \vec{v}_2 + \dots + k_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

yang mana semua C_i dan $k_j = 0$

$$\text{misal : } A = C_1 \vec{u}_1 + C_2 \vec{u}_2 + \dots + C_m \vec{u}_m$$

$$B = k_1 \vec{v}_1 + k_2 \vec{v}_2 + \dots + k_n \vec{v}_n$$

Karena A dan B diketahui bebas linier, maka

$$A + B = \vec{0}$$

$$A = -B$$

Karena A bebas linier, maka semua koef-nya sama dengan nol, begitupun B . Dan ketika $U \cap V = \{\vec{0}\}$, maka $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_s, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_t\}$ memenuhi

$$P_1 \vec{u}_1 + P_2 \vec{u}_2 + \dots + P_s \vec{u}_s + P_{s+1} \vec{v}_1 + \dots + P_{s+t} \vec{v}_t = \vec{0}$$

dengan $P_1 = P_2 = \dots = P_{s+t} = 0$

Sehingga $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_s, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_t\}$ bebas linier.

11. Asumsikan $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ sub himpunan vektor pada $\mathbb{R}^m$ yang bebas linear. Anggap A adalah matriks invertible $m \times m$. Tunjukkan $\{A\vec{v}_1, A\vec{v}_2, \dots, A\vec{v}_n\}$ bebas linier!

Jawab:

Akan dibuktikan $\{A\vec{v}_1, A\vec{v}_2, \dots, A\vec{v}_n\}$, diketahui A matriks invertible $\rightarrow$ maka A punya invers yang membuat $A \cdot A^{-1} = I$. Sehingga :

$$k_1 A\vec{v}_1 + k_2 A\vec{v}_2 + \dots + k_n A\vec{v}_n = 0$$

* Kalikan kedua ruas dengan A^{-1}

$$k_1 A^{-1} A\vec{v}_1 + k_2 A^{-1} A\vec{v}_2 + \dots + k_n A^{-1} A\vec{v}_n = 0$$

$$k_1 \vec{v}_1 + k_2 \vec{v}_2 + \dots + k_n \vec{v}_n = 0$$

Sesuai definisi kebebasan linier, maka

$$k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$$

Jadi, terbukti bahwa $\{A\vec{v}_1, A\vec{v}_2, \dots, A\vec{v}_n\}$ Bebas Linier.

nilai $r =$ Sebarang bilangan real
 $t = -2r$ //

12. Temukan kondisi bilangan real r, s, t yang menjamin

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ t \end{pmatrix} \right\}$$

Bebas Linear

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ r & s & t \end{pmatrix} = A \text{ (misal)}$$

Agar menjamin bebas linear, maka $\det(A) = 0$

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ s & t \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ s & t \end{vmatrix} + r \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$2s - (t + 2s) + (-2)r = 0$$

$$2s - t - 2s - 2r = 0$$

$$-t - 2r = 0$$

$$t = -2r$$

Untuk menjamin $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ t \end{pmatrix} \right\}$

bebas linier, maka